直観論的理論とトポス (Boole代数値の解析学と超準解析)

AUTHOR(S):

上江洲, 忠弘

数理解析研究所講究録
441巻 1981年 93-115

直観論的理論とトポス

九大 理　上江洲 忠弘

高階直観論理とトポスとの関係は，M. P. Fourman (1977)，A. Boileau & A. Joyal (1981) 等によって明らかにされている．ここでは，彼らのように，高階直観論理の体系を考えることなく，Lawvere流の“理論”の観点から，直観論的理論とトポスとの関係を論ずる．

1．圏に於ける変数

この章で導入される記法や結果は，次章以下で断りなしに用いる．

Cを有限積を持つ圏とし，Vを変数の集まり，$^{\#}$を変数にCの対象を対応させる対応関係とする．変数xに対応するCの対象$x^{\#}$をxの<u>変域</u>と呼ぶ．

Vの各有限部分集合$\{x_1, \ldots, x_m\}$に対し，新しい対象

$\overline{\{x_1,\ldots,x_n\}}$ を，$x_1^\#,\ldots,x_m^\#$ のCに於ける積と同形になるように，Cに添加する．このようにして得られる，圏Cの拡張$\overline{C}$を，V，#に関するC上の<u>変数系</u>という．

変数 $x_1,\ldots,x_m$ に対し，$x_1^\#,\ldots,x_m^\#$ のCに於ける積を $x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#$ で表し，添加された対象 $\overline{\{x_1,\ldots,x_m\}}$ から積 $x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#$ への同形射を $(x_1,\ldots,x_m):\overline{\{x_1,\ldots,x_m\}}\longrightarrow x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#$ で表す．また，射影は $x_i:\overline{\{x_1,\ldots,x_m\}}\longrightarrow x_i^\#$ で表す．更に逆射は $(x_1,\ldots,x_m)^{\leftarrow}:x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#\longrightarrow\overline{\{x_1,\ldots,x_m\}}$ で表す．

XがVの有限部分集合，Aが圏Cの対象のとき，変数系$\overline{C}$の射 $\boldsymbol{f}:\overline{X}\longrightarrow A$ をC上の<u>v→射</u>と呼ぶ．$x\in X$ のとき x は $\boldsymbol{f}$ に含まれるという．

X，Yが共にVの有限部分集合で，$X\subseteq Y$ のとき，$X:\overline{Y}\longrightarrow\overline{X}$ で次の図を可換にする$\overline{C}$の射を表す．

$$\begin{tikzcd}
\overline{Y} \arrow[d, "X"'] \arrow[dr, "x"] \arrow[dr, phantom, "(x\in X)", pos=0.3] & \\
\overline{X} \arrow[r, "x"'] & x^\#
\end{tikzcd}$$

v→射 $\boldsymbol{f}:\overline{X}\longrightarrow A$，$\boldsymbol{g}:\overline{Y}\longrightarrow A$ に対し，$\boldsymbol{f}\doteq\boldsymbol{g}$ で次の図が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
\overline{X\cup Y} \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "X"'] & \overline{Y} \arrow[d, "\boldsymbol{g}"] \\
\overline{X} \arrow[r, "\boldsymbol{f}"'] & A
\end{tikzcd}$$

v→射 $g_1:\overline{Y_1}\to A_1$, …, $g_n:\overline{Y_n}\to A_n$ に対し,

$$(g_1,\dots,g_n):\overline{Y_1\cup\cdots\cup Y_n}\longrightarrow A_1\times\cdots\times A_n$$

で次の図を可換にする射を表す.

$$\begin{tikzcd}
\overline{Y_1\cup\cdots\cup Y_n} \arrow[r, "Y_i"] \arrow[d, "{(g_1,\dots,g_n)}"'] \arrow[dr, phantom, "{(i=1,\dots,n)}"] & \overline{Y_i} \arrow[d, "g_i"] \\
A_1\times\cdots\times A_n \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

また, $y_1^\#=A_1$, …, $y_n^\#=A_n$ のとき

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ g_1 & & g_n \end{pmatrix}$$

を<u>代入</u>といい, v→射

$$(x_1,\dots,x_m,y_{i_1},\dots,y_{i_k}):\overline{\{x_1,\dots,x_m,y_{i_1},\dots,y_{i_k}\}}\to x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#\times y_{i_1}^\#\times\cdots\times y_{i_k}^\#$$

に対し,

$$(x_1,\dots,x_m,y_{i_1},\dots,y_{i_k})\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ g_1 & & g_n \end{pmatrix}$$

は v→射

$$(x_1,\dots,x_m,g_{i_1},\dots,g_{i_k}):\overline{\{x_1,\dots,x_m\}\cup Y_{i_1}\cup\cdots\cup Y_{i_k}}\to x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#\times y_{i_1}^\#\times\cdots\times y_{i_k}^\#$$

を表す. 但し, $1\leqq i_1,\dots,i_k\leqq n$ で, $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n$ は互に異なる.

互に異なる変数 $y_1,\dots,y_n$ と, C の対象 A に対し, 冪 $A^{y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#}$ が C にあるとき, v→射 $f:\overline{X}\to A$ に対し

$$y_1\cdots y_n\mathbf{f} : \overline{X-\{y_1,\dots,y_n\}} \longrightarrow A^{y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#}$$

で，次の図を可換にするv→射を表す．

$$\begin{tikzcd}
\overline{\{y_1,\dots,y_n\}\cup X} \arrow[r, "X"] \arrow[d, "{(y_1,\dots,y_n,\ y_1\cdots y_n\mathbf{f})}"'] & \overline{X} \arrow[d, "\mathbf{f}"] \\
y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#\times A^{y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#} \arrow[r, "ev"'] & A
\end{tikzcd}$$

このv→射 $y_1\cdots y_n\mathbf{f}$ を $\mathbf{f}$ からの $y_1,\dots,y_n$ に関する<u>アブストラクト</u>という．

v→射 $\mathbf{f}:\overline{X}\longrightarrow A$ と，変数の集合 $\{y_1,\dots,y_n\}$ に対し，$X\subseteq\{y_1,\dots,y_n\}$ のとき，$\lambda y_1\cdots y_n.\mathbf{f} : y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#\longrightarrow A$ で次のような合成射を表す．

$$\begin{tikzcd}
y_1^\#\times\cdots\times y_n^\# \arrow[r, "\lambda y_1\cdots y_n.\mathbf{f}"] \arrow[d, "{(y_1,\dots,y_n)^{\leftarrow}}"'] & A \\
\overline{\{y_1,\dots,y_n\}} \arrow[r, "X"'] & \overline{X} \arrow[u, "\mathbf{f}"']
\end{tikzcd}$$

<u>**命題**</u>　(1)　v→射 $\mathbf{f}:\overline{\{x_1,\dots,x_m\}}\longrightarrow A$ に対し，$f(x_1,\dots,x_m)=\mathbf{f}$ なる射 $f:x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#\longrightarrow A$ が一意に存在する．

(2)　$1,\dots,m$ の置換 $i_1,\dots,i_m$ と，射 $g:x_{i_1}^\#\times\cdots\times x_{i_m}^\#\longrightarrow A$ に対し，$f(x_1,\dots,x_m)=g(x_{i_1},\dots,x_{i_m})$ なる射が一意に存在する．

(3) $\mathfrak{g}_1 \doteq \mathfrak{g}_1'$, …, $\mathfrak{g}_n \doteq \mathfrak{g}_n'$ ならば $(\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n) \doteq (\mathfrak{g}_1', \ldots, \mathfrak{g}_n')$.
特に，$(\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ と $(\mathfrak{g}_1', \ldots, \mathfrak{g}_n')$ との定義域が同じならば，
$(\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n) = (\mathfrak{g}_1', \ldots, \mathfrak{g}_n')$.

(4) $\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{f}'$, $\mathfrak{g}_1 \doteq \mathfrak{g}_1'$, …, $\mathfrak{g}_n \doteq \mathfrak{g}_n'$ ならば，

$$\mathfrak{f}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_n \end{pmatrix} \doteq \mathfrak{f}'\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{g}_1' & & \mathfrak{g}_n' \end{pmatrix}.$$

(5) $\{y_1, \ldots, y_n\} - \{x_1, \ldots, x_m\} = \{y_1, \ldots, y_k\}$ ならば

$$\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{h}_1 & & \mathfrak{h}_n \end{pmatrix} = \mathfrak{f}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m & y_1 & \cdots & y_k \\ \mathfrak{g}_1\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{h}_1 & & \mathfrak{h}_n \end{pmatrix} & \cdots & \mathfrak{g}_m\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{h}_1 & & \mathfrak{h}_n \end{pmatrix} & \mathfrak{h}_1 & \cdots & \mathfrak{h}_k \end{pmatrix}.$$

(6) $$y_1 \cdots y_n\, ev(y_1, \ldots, y_n, x) = x \ .$$

(7) $$ev(\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n, y_1 \cdots y_n \mathfrak{f}) \doteq \mathfrak{f}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_n \end{pmatrix}.$$

(8) $$y_1 \cdots y_n \mathfrak{f} = z_1 \cdots z_n \left(\mathfrak{f}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ z_1 & & z_n \end{pmatrix}\right),$$

但し，$y_1^\# = z_1^\#$, …, $y_n^\# = z_n^\#$，また，$z_1, \ldots, z_n$ は $y_1 \cdots y_n \mathfrak{f}$ に含まれない．

(9) $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ が互に異なり，$y_1, \ldots, y_n$ が，$\mathfrak{g}_1$, …, $\mathfrak{g}_m$ のどれにも含まれないならば，

$$(y_1 \cdots y_n \mathfrak{f})\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_m \end{pmatrix} = y_1 \cdots y_n \left(\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_m \end{pmatrix}\right).$$

(10) $\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{f}'$ ならば $y_1 \cdots y_n \mathfrak{f} \doteq y_1 \cdots y_n \mathfrak{f}'$.

(11) g を射影 $X:\overline{X\cup\{y_1,\ldots,y_n\}}\longrightarrow\overline{X}$ とひっ射 $f:\overline{X}\longrightarrow A$ との合成，g' を射影 $X':\overline{X'\cup\{y_1,\ldots,y_n\}}\longrightarrow\overline{X'}$ とひっ射 $f':\overline{X'}\longrightarrow A$ との合成とするとき，$y_1\cdots y_n f \doteq y_1\cdots y_n f'$ ならば $g\doteq g'$.

<u>定理</u> $F:C_1\longrightarrow C_2$ を関手，$\overline{C_1}$ を V_1, $^{\#}$ に関する C_1 上の変数系，$\overline{C_2}$ を V_2, $^{\#\#}$ に関する C_2 上の変数系とする．更に，$V_1\subseteq V_2$, で V_1 の各変数 x に対し，$F(x^{\#})=x^{\#\#}$ とする．このとき，F を，V_1 の各有限部分集合 X に対し，$F(\overline{X})=\overline{X}$ となるように，$\overline{C_1}$ から $\overline{C_2}$ への関手に拡張すると，

(1)
$$F\left(f\begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_n\\ g_1 & & g_n\end{pmatrix}\right)=F(f)\begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_n\\ F(g_1) & & F(g_n)\end{pmatrix},$$

(2)
$$F(y_1\cdots y_n f)=y_1\cdots y_n F(f).$$

2. 理論

クラス Σ に対し，Σ^* で Σ の元の有限列（空も含む）の全体を表し，$\Sigma\wr\Sigma^+$ で $\sigma^{\sigma_1\cdots\sigma_n}$ $(\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in\Sigma\,;\ n=1,2,\cdots)$ なる図形の全体を表す．

クラス Σ，及び $\Sigma\wr\Sigma^+$ の部分クラス Ψ に対し，次の条件をみたす圏を (Σ,Ψ) 上の<u>理論</u>という：

(1) 対象のクラスは $(\Sigma \cup \Psi)^*$.

(2) $\Sigma \cup \Psi$ の元 $t_1, \ldots, t_n$ に対し，有限列 $t_1 \cdots t_n$ は $t_1, \ldots, t_n$ の積である．射影は $\pi_i : t_1 \cdots t_n \to t_i$ $(i=1, \ldots, n)$ で表す．

(3) Ψ の元 $\sigma^{\sigma_1 \cdots \sigma_n}$ は σ を底，$\sigma_1 \cdots \sigma_n$ を指数とする冪である．評価射は $ev : \sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma^{\sigma_1 \cdots \sigma_n} \longrightarrow \sigma$ で表す．

Σ が唯1つの元だけからなり，Ψ が空集合のとき，(Σ, Ψ) 上の理論は，Lawvere の代数的理論である．

(Σ, Ψ) 上の理論 T に対し，Ψ から Σ への対応 $(\ ) : \Psi \to \Sigma$ と，同形射 $CD : \psi \longrightarrow (\psi)$ $(\psi \in \Psi)$ があるとき，T は $(\ ) : \Psi \to \Sigma$ 及び $CD : \psi \to (\psi)$ $(\psi \in \Psi)$ に関して <u>Ψ-閉</u> であるという．$CD : \psi \to (\psi)$ の逆射を $DC : (\psi) \to \psi$ で表す．

<u>命題 1</u>. $(\Sigma, \Sigma[\Sigma^+)$ 上の理論で，$\Sigma[\Sigma^+$-閉なるものは Cartesian-closed.

<u>命題 2</u>. $(\ ) : \Psi \to \Sigma$ 及び $CD : \psi \to (\psi)$ $(\psi \in \Psi)$ に関して Ψ-閉なる理論に於て，変数 $x_1, \ldots, x_m$ を含まない射 $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ に対し，$ev(x_1, \ldots, x_m, DC(\mathfrak{f})) \doteq ev(x_1, \ldots, x_m, DC(\mathfrak{g}))$

ならば $\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{g}$.

証明. $ev(\bar{x}, DC(\mathfrak{f})) \doteq ev(\bar{x}, DC(\mathfrak{g}))$ とする. §1 の命題の (6) と (10) より $DC(\mathfrak{f}) \doteq DC(\mathfrak{g})$. DC は同形射であるから $\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{g}$.

命題3. (Σ, Ψ) 上の理論T, 対応 $(\ ) : \Psi \to \Sigma$, T の射 $CD : \sigma^{\bar{\tau}} \longrightarrow (\sigma^{\bar{\tau}})$, $Ap : \bar{\tau}(\sigma^{\bar{\tau}}) \to \sigma$ $(\sigma^{\bar{\tau}} \in \Psi)$ に対し, CD 及び Ap が次の条件をみたすとする:

(1) $Ap(\bar{x}, CD(\alpha)) = ev(\bar{x}, \alpha)$.

(2) $Ap(\bar{x}, \mathfrak{f}) = Ap(\bar{x}, \mathfrak{g})$ ならば $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$, 但し $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ には $\bar{x}$ のどの変数も含まれない.

このとき, $CD : \sigma^{\bar{\tau}} \longrightarrow (\sigma^{\bar{\tau}})$ は同形射である. 即ち, T は Ψ-閉である.

証明. $DC = \lambda u.\bar{x} Ap(\bar{x}, u)$ とおく.

$$
\begin{aligned}
DC \circ CD(\alpha) &= \bar{x} Ap(\bar{x}, CD(\alpha)) \\
&= \bar{x} ev(\bar{x}, \alpha) && (\because \text{条件}(1)) \\
&= \alpha && (\because \text{§1 命題}(6)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ap(\bar{x}, CD \circ DC(u)) &= ev(\bar{x}, DC(u)) && (\because \text{条件}(1)) \\
&= Ap(\bar{x}, u) && (\because \text{§1 命題}(7)).
\end{aligned}
$$

従って, 条件 (2) より $CD \circ DC(u) = u$.

(証明終)

命題3の条件(2)は，外延性公理に相当する．

3. Heyting理論と直観論的理論

T を $(\Sigma, \Sigma l \Sigma^{+})$ 上の理論とし，Ω を Σ の元とする．更に，

$\equiv : モモ \to \Omega$　$(モ \in (\Sigma \cup \Sigma l \Sigma^{+})^{*})$ を T の射とする．

以下，次のような記法を用いる：

1 で $(\Sigma, \Sigma l \Sigma^{+})^{*}$ の空の元を表す．従って $11 = 1$．

$\mathrm{true} : 1 \to \Omega$ で $\equiv : 11 \to \Omega$ を表す．

$\Upsilon : \bar{\Phi} \to \Omega$ で $\mathrm{true}() : \bar{\Phi} \to \Omega$ を表す．ここに，$\bar{\Phi}$ は，T 上の変数系の，変数の空集合 ϕ に対して添加された対象である．

$f \equiv g$ で $\equiv(f, g)$ を表す．

射 $\wedge : \Omega\Omega \to \Omega$ を $\wedge = \lambda uv.\,(uv) \equiv (\Upsilon, \Upsilon)$ で定義する．

$\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}$ で $\wedge(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ を表す．

理論 T が次の条件をみたすとき，T を<u>直観論的理論</u>という．

(I1)　T の各対象 A に対し，

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\lambda a.(a,a)"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
AA \arrow[r, "\equiv"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

は pullback である．

(I2)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{true},\mathrm{true})"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ \Omega\Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

は pullback である．

(I3)　2つの射 $P: A\to\Omega$ と $Q: A\to\Omega$ とに対し，もしも，どんな射 $f: B\to A$ に対しても $Pf=\mathrm{true}_B$ と $Qf=\mathrm{true}_B$ とが同値ならば，$P=Q$．但し，$\mathrm{true}_B: B\to\Omega$ は射 $B\to 1$ と射 $\mathrm{true}: 1\to\Omega$ との合成である．

条件 (I1)，(I2)，(I3) はそれぞれ次の条件と同等である：

(I1′)　2つの $v\to$射 $\mathbb{f}$，$\mathbb{g}$ に対して，$\mathbb{f}\equiv\mathbb{g}\doteq\curlyvee$ と $\mathbb{f}\doteq\mathbb{g}$ とは同値である．

(I2′)　2つの $v\to$射 $\mathbb{P}:\overline{X}\to\Omega$ と $\mathbb{Q}:\overline{X}\to\Omega$ とに対して，$\mathbb{P}\wedge\mathbb{Q}\doteq\curlyvee$ と $\mathbb{P}\doteq\curlyvee$ かつ $\mathbb{Q}\doteq\curlyvee$ とは同値である．

(I3′)　2つの $v\to$射 $\mathbb{P}:\overline{X}\to\Omega$ と $\mathbb{Q}:\overline{X}\to\Omega$ とに対して，もしも，どんな代入 θ に対しても $\mathbb{P}\theta\doteq\curlyvee$ と $\mathbb{Q}\theta\doteq\curlyvee$ とが同値ならば，$\mathbb{P}=\mathbb{Q}$，但し $X\neq\phi$．

命題1. Tが直観的理論ならば, 次のことが成り立つ.

(1) $((\mathbb{f}\equiv\mathbb{g})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{g}}=(\mathbb{f}\equiv\mathbb{g})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}}$.

(2) $\mathbb{P}\wedge(\mathbb{f}\equiv\mathbb{g})\doteq\mathbb{P}$ ならば $\mathbb{P}\wedge(x\mathbb{f}\equiv x\mathbb{g})\doteq\mathbb{P}$, 但し, xは$\mathbb{P}$に含まれない.

(3) $\mathbb{P}\wedge\mathbb{V}=\mathbb{P}$.

(4) $(\mathbb{P}\wedge\mathbb{Q})\wedge\mathbb{R}=(\mathbb{Q}\wedge\mathbb{R})\wedge\mathbb{P}$.

(5) $\mathbb{P}\wedge(\mathbb{Q}\equiv\mathbb{R})=\mathbb{P}\wedge(\mathbb{P}\wedge\mathbb{Q}\equiv\mathbb{P}\wedge\mathbb{R})$.

命題1の証明のために, 次の補題を用意する.

補題 一般の変数系に於いて, 次の事が成り立つ.

(1) x_0を変域が終対象である変数とするとき, v→射 $\mathbb{f}:\overline{\Phi}\to A$, $\mathbb{g}:\overline{\Phi}\to A$, $\mathbb{h}:\overline{\{x_0\}}\to A$ が $\mathbb{f}\doteq\mathbb{h}$ かつ $\mathbb{g}\doteq\mathbb{h}$ をみたせば $\mathbb{f}=\mathbb{g}$ である.

(2) $\mathbb{f}\doteq\mathbb{g}$ で, $\mathbb{f}$ と $\mathbb{g}$ とが同じ定義域を持つ v→射ならば $\mathbb{f}=\mathbb{g}$ である.

命題1の(1)の証明. x_0を変域が1の変数とし, $\mathbb{f}$, $\mathbb{g}$, $\mathbb{P}$の定義域をそれぞれ$\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$とする. 変数の集合Wを, $X\cup Y\cup(Z-\{x\})=\phi$ のとき, $W=\{x_0\}$, そうでないとき, $W=X\cup Y\cup(Z-\{x\})$ と定める. v→射 $\mathbb{f}'$, $\mathbb{g}'$, $\mathbb{P}'$を

それぞれ定義域が $\overline{W}$, $\overline{W}$, $\overline{W\cup Z}$ で，$\mathbb{f}\doteq\mathbb{f}'$，$\mathbb{g}\doteq\mathbb{g}'$，$\mathbb{P}\doteq\mathbb{P}'$ なるものとする．

θ を $\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathbb{k}_1 & \cdots & \mathbb{k}_n \end{pmatrix}$ なる代入とし，どの $y_1,\ldots,y_n$ も x とは異なるものとする．

今，$((\mathbb{f}'\equiv\mathbb{g}')\wedge\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'})\theta\doteq\mathrm{V}$ とする．条件（I 1′），（I 2′）より $\mathbb{f}'\theta=\mathbb{g}'\theta$ かつ $\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}\theta\doteq\mathrm{V}$．§1の命題の（5）と $\mathbb{f}'\theta=\mathbb{g}\theta'$ であることとから $\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}\theta=\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{g}'}\theta$．従って，$\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}\theta\doteq\mathrm{V}$ より $\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{g}'}\theta\doteq\mathrm{V}$．故に，$(((\mathbb{f}'\equiv\mathbb{g}')\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}'})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{g}'})\theta\doteq\mathrm{V}$.

従って，条件（I 3′）より，

$$((\mathbb{f}'\equiv\mathbb{g}')\wedge\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'})\wedge\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{g}'}=(\mathbb{f}'\equiv\mathbb{g}')\wedge\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}.$$

ところで，$\mathbb{f}\doteq\mathbb{f}'$，$\mathbb{g}\doteq\mathbb{g}'$，$\mathbb{P}\doteq\mathbb{P}'$ より

$$((\mathbb{f}\equiv\mathbb{g})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{g}}\doteq((\mathbb{f}'\equiv\mathbb{g}')\wedge\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'})\wedge\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{g}'},$$

$$(\mathbb{f}\equiv\mathbb{g})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}}\doteq(\mathbb{f}'\equiv\mathbb{g}')\wedge\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}.$$

従って，$X\cup Y\cup(Z-\{x\})=\phi$ のときは，補題の（1）より，そうでないときは，補題の（2）より，

$$((\mathbb{f}\equiv\mathbb{g})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{g}}=(\mathbb{f}\equiv\mathbb{g})\wedge\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}}.$$

（証明終）

命題1の（2）～（5）は（1）の場合と同様にして証明できる．

理論Tが条件（I 1）及び命題1の（1）～（5）をみたすとき，

T を Heyting 理論という．

命題2． T が Heyting 理論ならば，次の事が成り立つ．

(1) $\mathbb{P}\wedge\mathbb{Q}=\mathbb{Q}\wedge\mathbb{P}$.

(2) $(\mathbb{P}\wedge\mathbb{Q})\wedge\mathbb{R}=\mathbb{P}\wedge(\mathbb{Q}\wedge\mathbb{R})$.

(3) $\mathbb{P}\wedge\mathbb{P}=\mathbb{P}$.

(4) 条件 (I 3) .

値域がΩである射 $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}$ に対し， $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n\to\mathbb{Q}$ で $\mathbb{P}_1\wedge\cdots\wedge\mathbb{P}_n\doteq\mathbb{P}_1\wedge\cdots\wedge\mathbb{P}_n\wedge\mathbb{Q}$ なることを示す．また， $\models\mathbb{Q}$ で $\mathbb{Q}\doteq\mathbb{V}$ なることを示す．

「$\Gamma_1\to\mathbb{Q}_1$, …, $\Gamma_n\to\mathbb{Q}_n$ ならば $\Gamma\to\mathbb{Q}$」ということを

$$\frac{\Gamma_1\to\mathbb{Q}_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n\to\mathbb{Q}_n}{\Gamma\to\mathbb{Q}}$$

で表す．

命題3． T が Heyting 理論ならば，次の事が成り立つ．

(1) $\models \mathbf{f}\equiv\mathbf{f}$.

(2) $\mathbf{f}\equiv g,\ \mathbb{P}\binom{x}{\mathbf{f}}\to\mathbb{P}\binom{x}{g}$.

(3)
$$\frac{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n \to \mathbb{Q}}{\mathbb{P}_1\theta, \ldots, \mathbb{P}_n\theta \to \mathbb{Q}\theta},$$

但し，θは任意の代入である．

(4)
$$\frac{\Gamma \to \mathbb{Q}}{\Gamma' \to \mathbb{Q}'},$$

但し，$\mathbb{Q} \doteq \mathbb{Q}'$であり，また，$\Gamma$の各ひ射$\mathbb{P}$に対し，$\mathbb{P} \doteq \mathbb{P}'$となるひ射$\mathbb{P}'$が$\Gamma'$にある．更に，$\Gamma$や$\mathbb{Q}$に含まれる変数は，$\Gamma'$または$\mathbb{Q}'$に含まれる．

(5)
$$\frac{\Gamma \to \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{R}}{\Gamma \to \mathbb{R}},$$

但し，$\mathbb{Q}$に含まれる変数はΓまたは$\mathbb{R}$に含まれる．

(6)
$$\frac{\Gamma \to \mathbb{P} \qquad \Gamma \to \mathbb{Q}}{\Gamma \to \mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}}.$$

(7)
$$\frac{\mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{R}}{\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{R}}, \qquad \frac{\mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{R}}{\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{R}}.$$

(8)
$$\frac{\mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{P}}{\Gamma \to \mathbb{P} \equiv \mathbb{Q}}.$$

(9)
$$\frac{\Gamma \to f \equiv g}{\Gamma \to xf \equiv xg},$$

但し，xはΓに含まれない．

<u>命題4</u>. T は Heyting 理論であるとする.

(1) 次のような射 $\forall : \Omega^A \to \Omega$ が一意に存在する:

$$\frac{\Gamma \to \mathbb{Q}}{\Gamma \to \forall x \mathbb{Q}},$$

但し, $x^\# = A$ で, x は Γ に含まれない.

$$\frac{\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}}, \Gamma \to \mathbb{Q}}{\forall x \mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{Q}},$$

但し, $\mathbb{f}$ に含まれる変数は, $\forall x \mathbb{P}, \Gamma$ 又は $\mathbb{Q}$ に含まれる. また, $x^\# = A$.

(2) 次のような射 $\exists : \Omega^A \to \Omega$ が一意に存在する.

$$\frac{\Gamma \to \mathbb{Q}\binom{x}{\mathbb{f}}}{\Gamma \to \exists x \mathbb{Q}},$$

但し, $\mathbb{f}$ に含まれる変数は, Γ 又は $\exists x \mathbb{Q}$ に含まれる. また, $x^\# = A$.

$$\frac{\mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{Q}}{\exists x \mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{Q}},$$

但し, $x^\# = A$ で, x は $\Gamma, \mathbb{Q}$ に含まれない.

<u>証明</u>. (1) $\forall : \Omega^A \to \Omega$ を $\forall = \lambda\alpha.(\alpha \equiv x\Upsilon)$ で定義すればよい.

(2) $\supset : \Omega \times \Omega \to \Omega$ を $\supset = \lambda uv.(u \wedge v \equiv u)$ とし, $\exists : \Omega^A \to \Omega$ を $\exists = \lambda\alpha. \forall w(\forall x(ev(x, \alpha) \supset w) \supset w)$ で定義すればよい.

射 $!:\Omega^B\to\Omega^B$ を次のように定義する：

$$! = \lambda\beta.\, b\forall x(ev(x,\beta)\equiv(b\equiv x)).$$

命題5．Tは直観論的理論であるとする．次の図を考える．

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & 1 \arrow[d, "true"] \\
A \arrow[r, "P"'] & \Omega
\end{tikzcd},$$

但し，$B\in\Sigma^*-\{1\}$，AはTの任意の対象である．

(1)　図(i)がpullbackならば　$P=\lambda a.\exists b(h(b)\equiv a)$．

(2)　次の2つの条件は同等である．

(a)　$\models\exists!b\,Q(c,b)$　なる射　$Q:C\times B\to\Omega$　に対し，$\models Q(c,g(c))$　なる射　$g:C\to B$　が一意に存在する．

(b)　任意の単射　$h:B\to A$　に対し，(i)をpullbackとする射　$P:A\to\Omega$　が一意に存在する．

証明　(2)の(b)⇒(a)のみを示す．

射 $h:B\to\Omega^B$ を $h=\lambda x.y(y\equiv x)$ と定義する．hは単射であるから，条件(b)より，(i)をpullbackとする射 $P:\Omega^B\to\Omega$ が存在する．(1)より，$P=\lambda a.\exists b(h(b)\equiv\beta)$．$h(b)\equiv\beta = y(y\equiv b)\equiv y\,ev(y,\beta)$．命題3の(1)，(2)より，$y(y\equiv b)\equiv y\,ev(y,\beta)\to(y\equiv b)\equiv ev(y,\beta)$．従って，∀の定義より，$y(y\equiv b)\equiv y\,ev(y,\beta)\to\forall y((y\equiv b)\equiv ev(y,\beta))$．また，∀の

定義と，命題3の(9)より $\forall y((y\equiv b)\equiv ev(y,\beta))\to y(y\equiv b)\equiv y\,ev(y,\beta)$.
従って，$y(y\equiv b)\equiv y\,ev(y,\beta) = \forall y((y\equiv b)\equiv ev(y,\beta))$．故に，
$h(b)\equiv\beta = \forall y(ev(y,\beta)\equiv(b\equiv y))$．即ち，$P=\exists!$．

さて，$\models\exists! b\,Q(c,b)$ とする．可換な図

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "\lambda c.bQ(c,b)"'] & & \\
& B \arrow[r] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & 1 \arrow[d, "true"] \\
& \Omega^B \arrow[r, "\exists!"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

より，$h(g(c))=bQ(c,b)$ なる射 $g:C\to B$ が存在し，
$h(g(c))=bQ(c,b)$ ならば，$(g(c)\equiv b)=Q(c,b)$ 故 $\models Q(c,g(c))$.
従って，$\models Q(c,g(c))$ なる射 $g:C\to B$ が一意に存在する．

<u>命題6</u>．Tは Heyting 理論であるとする．射 $P:A\to\Omega$ に対し，$P=\lambda a.\exists b(h(b)\equiv a)$ なる射 $h:B\to A$ が存在するならば，Tは直観論的理論である．

<u>証明</u>．条件(I3)が成り立つことを示せばよい．今，
$P=\lambda a.\exists b(h(b)\equiv a)$，$Q=\lambda a.\exists c(k(c)\equiv a)$ で，任意の射 $g:D\to A$ に対し，$Pg=true_D$ と $Qg=true_D$ が同値であるとする．$Ph=true_B$ であるから $Qh=true_B$，即ち $\models\exists c(k(c)\equiv h(b))$．従って，$\exists b(h(b)\equiv a)\to\exists c(k(c)\equiv a)$．
同様に，$\exists c(k(c)\equiv a)\to\exists b(h(b)\equiv a)$．従って $P=Q$.

4. 高階直観論的理論とトポス

$\mathbb{T}$がHeyting（又は直観論的）理論で，対応$(\ ):\Sigma\wr\Sigma^+\to\Sigma$と射$\mathrm{Ap}:\bar{\tau}(\sigma^{\bar{\tau}})\to\sigma$　$(\sigma^{\bar{\tau}}\in\Sigma\wr\Sigma^+)$が条件

(C)　$\forall\bar{x}\,\exists!y\ \mathrm{ev}(\bar{x},y,\alpha)\to\exists!u\,\forall\bar{x}\ \mathrm{ev}(\bar{x},\mathrm{Ap}(\bar{x},u),\alpha)$

をみたすとき，$\mathbb{T}$を<u>適用射</u>$\mathrm{Ap}:\bar{\tau}(\sigma^{\bar{\tau}})\to\sigma$　$(\sigma^{\bar{\tau}}\in\Sigma\wr\Sigma^+)$をもつ<u>高階Heyting（又は 直観論的）理論</u>という．

条件(C)は次のスキーマと同等である：

$$\forall\bar{x}\,\exists!y\,\mathbb{P}\to\exists!u\,\forall\bar{x}\left(\mathbb{P}\binom{y}{\mathrm{Ap}(\bar{x},u)}\right),$$

但し，uは$\mathbb{P}$に含まれない．

<u>定理1.</u> トポス$\mathbb{E}$に対し，$\widetilde{\mathbb{E}}$を次のような圏とする．

(1)　$\widetilde{\mathbb{E}}$の対象全体は$(E\cup E\wr E^+)^*$，但し，Eは$\mathbb{E}$の対象全体のなすクラスである．

(2)　$\mathbb{E}$の対象$A_1,\dots,A_n$に対し，列$A_1\cdots A_n$は$\widetilde{\mathbb{E}}$に於て$A_1,\dots,A_n$の積である．但し，$n=0,1,2,\dots$．

(3)　$\mathbb{E}$の対象$A,A_1,\dots,A_n$に対し，$A^{A_1\cdots A_n}$は$\widetilde{\mathbb{E}}$に於て，Aを底，$A_1\cdots A_n$を指数とする冪である．$(n=1,2,\dots)$

(4)　$\mathbb{E}$は$\widetilde{\mathbb{E}}$の充満部分圏である．

このとき，$\widetilde{\mathbb{E}}$は$\mathbb{E}$と同等であり，また，$(E,E\wr E^+)$上の高階直観論的理論である．かかる$\widetilde{\mathbb{E}}$は$\mathbb{E}$に対して一意に存在す

る.

<u>証明</u>. 明らか.

<u>定理2</u>. Tが高階Heyting理論で,

(1) $\models \exists! b\, Q(c,b)$ なる射 $Q: C\times B\to\Omega$ に対し, $\models Q(c, g(c))$ なる射 $g: C\to B$ が一意に存在し,

(2) 各射 $P: A\to\Omega$ に対し, $P=\lambda a.\exists b(h(b)\equiv a)$ なる単射 $h: B\to A$ が存在する

ならば, Tはトポスである.

<u>証明</u>. $Ap: \bar{\tau}(\sigma^{\bar{\tau}})\to\sigma$ $(\sigma^{\bar{\tau}}\in\Sigma l \Sigma^{+})$ をTの適用射とする. 条件(C)より $\models \exists! u\forall\bar{x}(Ap(\bar{x},u)\equiv ev(\bar{x},\alpha))$. 従って, 条件(1)より, $\models\forall\bar{x}(Ap(\bar{x},CD(\alpha))\equiv ev(\bar{x},\alpha))$ なる射 $CD: \sigma^{\bar{\tau}}\to \mathrm{l}(\sigma^{\bar{\tau}})$ $(\sigma^{\bar{\tau}}\in\Sigma l \Sigma^{+})$ が存在す. また, 条件(C)より, $\forall\bar{x}(Ap(\bar{x},u)\equiv Ap(\bar{x},v))\to u\equiv v$. 従って, §2命題1, 命題3より, TはCartesian-closed.

条件(2)より, §3命題6から, Tは直観論的理論であ. また, 条件(1)と§3命題5(2)とから, 各単射 $h: B\to A$ $(B\in\Sigma^{+})$ に対し, 図(i)がpullbackとなるような射 $P: A\to\Omega$ が一意に存在する.

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & (i) & \downarrow{\scriptstyle true} \\ A & \xrightarrow[P]{} & \Omega \end{array}$$

条件(1)，(2)より，各射 $P: A \to \Omega$ に対し，図(i)を pullback とする単射 $h: B \to A$ が存在する．

従って，$\mathrm{true}: 1 \to \Omega$ は subobject classifier である．

故に，$\bar{T}$はトポスである．

（証明終）

Tが高階Heyting理論のとき，

$(\exists x_1 \cdots x_n)\mathbb{P}$ で v→射 $\exists z_1 \cdots z_n \mathbb{P}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ z_1^* & & z_n^* \end{pmatrix}$，

$(\exists! x_1 \cdots x_n)\mathbb{P}$ で v→射 $\exists! z_1 \cdots z_n \mathbb{P}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ z_1^* & & z_n^* \end{pmatrix}$

を表す．ここに，$x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n$ は互に異なる変数で，$z_1, \ldots, z_n$ はいずれも $\mathbb{P}$ に含まれない．また，z_i^* は，x_i の変域が Σ の元のときは z_i 自身，x_i の変域が $\Sigma L \Sigma^{+}$ の元の時は $\overline{u} Ap(\overline{u}, z_i)$ なるアブストラクトである．

値域が Ω の射 P，Q，G，G′ に対し，

$$P(\overline{x}),\ Q(\overline{y}) \to G(\overline{x}, \overline{y}) \equiv G'(\overline{x}, \overline{y})$$

のとき，$G \underset{P,Q}{\frown} G'$ とする．$\underset{P,Q}{\frown}$ は同値関係である．

Gを含む $\underset{P,Q}{\frown}$ に関する同値類を $\overline{G}: P \to Q$ で表す．

<u>定理3</u>．Tは高階Heyting理論とする．$\bar{T}$を次のような圏とする．

(1)　対象は，値域を Ω とするTの射．

(2)　P から Q への射は

$$P(\bar{x}) \to (\exists! \bar{y})(G(\bar{x},\bar{y}) \wedge Q(\bar{y}))$$

なる G を含む $\widehat{P,Q}$ に関する同値類 $\bar{G}: P \to Q$.

(3)　射 $\bar{G}: P \to Q$ と射 $\bar{H}: Q \to R$ の合成は

$$\lambda \bar{x}\bar{z}.\ (\exists \bar{y})(G(\bar{x},\bar{y}) \wedge Q(\bar{y}) \wedge H(\bar{y},\bar{z}))$$

を含む $\widehat{P,R}$ に関する同値類.

このとき, $\bar{T}$ はトポスである.

<u>証明</u>. $\bar{T}$ は, 定理2の条件 (1), (2) が成り立つように, T を拡張したものであるから, 明らか.

T が高階 Heyting 理論で, $J: T \to \mathbb{E}$ は次の条件をみたす関手とする. 但し, $\mathbb{E}$ はトポスである.

(1)　$\Sigma \cup \Sigma\Sigma^{+}$ の元 $t_1, \ldots, t_n$ に対し, $J(t_1 \cdots t_n)$ は $J(t_1), \ldots, J(t_n)$ の積で, 射影 $\pi_i: t_1 \cdots t_n \to t_i$ に対し, $J(\pi_i): J(t_1 \cdots t_n) \to J(t_i)$ は射影である.

(2)　$J(\sigma^{\sigma_1 \cdots \sigma_n})$ は底 $J(\sigma)$, 指数 $J(\sigma_1 \cdots \sigma_n)$ の冪で, 評価射 $ev: \sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma^{\sigma_1 \cdots \sigma_n} \to \sigma$ に対し, $J(ev): J(\sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma^{\sigma_1 \cdots \sigma_n}) \to J(\sigma)$ は評価射である.

(3)　$J(true): J(1) \to J(\Omega)$ は subobject classifier.

(4)　適用射 $Ap: \bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}}) \to \sigma$ に対し, $J(Ap): J(\bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}})) \to J(\sigma)$ は評価射である.

(5)　$J(\equiv) : J(EE) \to J(\Omega)$ は同等射である．即ち，

$$
\begin{tikzcd}
J(E) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
J(EE) \arrow[r, "J(\equiv)"'] & J(\Omega)
\end{tikzcd}
$$

は pullback である．

このとき，J を T の論理モデルという．

定理 4．T は高階 Heyting 理論，$\bar{T}$ は定理 3 で定義されたトポスとする．$I : T \to \bar{T}$ を次のような関手とする．

(1)　T の各対象 A に対し，$I(A) = \mathrm{true}_A$．

(2)　T の各射 $f : A \to B$ に対し，$I(f) = \overline{\lambda xy.f(x) \equiv y} : \mathrm{true}_A \to \mathrm{true}_B$.

このとき，I は T の論理モデルである．

また，T の各論理モデル $J : T \to \mathbb{E}$ に対し，$K \circ I = J$ なる論理関手 $K : \bar{T} \to \mathbb{E}$ が，同形に関して，一意に存在する．

証明．明らか．

T_1, T_2 をそれぞれ，$(\Sigma_1, \Sigma_1 \subset \Sigma_1^+)$，$(\Sigma_2, \Sigma_2 \subset \Sigma_2^+)$ 上の高階 Heyting 理論とする．関手 $F : T_1 \to T_2$ が次の条件をみたすとき，F は H-関手であるという．

(1)　$\sigma \in \Sigma_1$ ならば $F(\sigma) \in \Sigma_2$．

(2) $\sigma^{\bar{\sigma}} \in \Sigma_1 \wr \Sigma_1^{+}$ ならば $F(\sigma^{\bar{\sigma}}) = F(\sigma)^{F(\bar{\sigma})}$.

(3) $t_1, \ldots, t_n \in \Sigma_1 \cup \Sigma_1 \wr \Sigma_1^{+}$ ならば $F(t_1 \cdots t_n) = F(t_1) \cdots F(t_n)$.

(4) $F(\equiv : \tau\tau \to \Omega) = \equiv : F(\tau\tau) \to \Omega$.

(5) $F(Ap : \bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}}) \to \sigma) = Ap : F(\bar{\sigma})(F(\sigma)^{F(\bar{\sigma})}) \to F(\sigma)$.

対象を small な高階 Heyting 理論とし，射を H-関手の同形に関する同値類とする圏を HH で表す．

対象を small なトポスとし，射を論理関手の同形に関する同値類とする圏を TT で表す．

<u>定理5</u>．定理1で定義した $\sim$ を，関手 $\sim : TT \longrightarrow HH$ に拡張し，定理3で定義した $\overline{}$ を，関手 $\overline{} : HH \to TT$ に拡張すると，$\overline{}$ は $\sim$ の左随判関手である．

<u>証明</u>．定理4より明らか．